

Biblioteca  
STEPHEN HAWKING

EDICIÓN E INTRODUCCIÓN A CARGO DE

# STEPHEN HAWKING

## LOS SUEÑOS DE LOS QUE ESTÁ HECHA LA MATERIA

Los textos fundamentales de la física  
cuántica y cómo revolucionaron la ciencia

CRÍTICA

# LOS SUEÑOS DE LOS QUE ESTÁ HECHA LA MATERIA

Los textos fundamentales de la física  
cuántica y cómo revolucionaron la ciencia

Edición e introducción a cargo de  
STEPHEN HAWKING

CRÍTICA  
BARCELONA

Primera edición: noviembre de 2011

Primera edición en esta nueva presentación: marzo de 2024

*Los sueños de los que está hecha la materia. Los textos fundamentales de la física cuántica y cómo revolucionaron la ciencia*

Stephen Hawking

La lectura abre horizontes, iguala oportunidades y construye una sociedad mejor. La propiedad intelectual es clave en la creación de contenidos culturales porque sostiene el ecosistema de quienes escriben y de nuestras librerías. Al comprar este libro estarás contribuyendo a mantener dicho ecosistema vivo y en crecimiento.

En Grupo Planeta agradecemos que nos ayudes a apoyar así la autonomía creativa de autoras y autores para que puedan continuar desempeñando su labor. Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra. Puede contactar con CEDRO a través de la web [www.conlicencia.com](http://www.conlicencia.com) o por teléfono en el 91 702 19 70 / 93 272 04 47

Título original: *The Dreams that Stuff is made of*

Los títulos originales de los distintos artículos que conforman este volumen figuran al pie de la página inicial de cada uno de ellos

© Running press, 2011

© Introducción, Stephen Hawking, 2011

© de la traducción, Javier García Sanz (introducción general, introducción a cada una de las partes, capítulos 1-6, 8, 10-18, 20-22, 24-30), Francesc Pedrosa (capítulos 7, 9 23), Marc Meléndez y Diane Schofield (capítulos 31 y 33) y Motel Najszatan (capítulo 32), 2011

© Editorial Planeta, S. A., 2024

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona (España)

Crítica es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.

[editorial@ed-critica.es](mailto:editorial@ed-critica.es)

[www.ed-critica.es](http://www.ed-critica.es)

ISBN: 978-84-9199-629-3

Depósito legal: B. 1.932-2024

Impresión y encuadernación: Egedsa

*Printed in Spain* - Impreso en España



La cuestión de la naturaleza de la luz ha sido un tema central durante buena parte de la historia de la física. Isaac Newton propuso una teoría corpuscular para la luz: un rayo de luz era una corriente de partículas pequeñas de la misma manera que una corriente de agua está compuesta de minúsculas moléculas de agua. Debido a su reputación como uno de los grandes fundadores de la física, su teoría de la luz fue ampliamente aceptada. Sin embargo, en 1802 Thomas Young probó definitivamente que la teoría corpuscular de Newton no podía ser la descripción completa de la luz. Él demostró que luz que incide sobre dos aberturas estrechas muy juntas produce un patrón de interferencia en una pantalla lejana. La interferencia es un fenómeno ondulatorio y no puede explicarse por una teoría corpuscular de la luz. Otro golpe importante a la teoría corpuscular de la luz llegó en los años sesenta del siglo XIX cuando James Clerk Maxwell unió las teorías de la electricidad y el magnetismo y demostró que la luz es una onda electromagnética. Con esto, la teoría ondulatoria de la luz descansaba sobre muy buenas bases teóricas y experimentales.

Sin embargo, a comienzos del siglo XX las extraordinarias explicaciones de dos desconcertantes observaciones cambiaron nuestra comprensión de la luz y dieron inicio a la revolución cuántica, en la que encontramos que luz y materia tienen *a la vez* propiedades ondulatorias y corpusculares. La primera de ellas fue la explicación de la forma del espectro de radiación del cuerpo negro.

Todos hemos visto que los objetos calientes brillan: el brillo rojo de las brasas de una hoguera que se extingue o las resistencias calien-

tes de una estufa, la luz producida por un filamento de tungsteno en una bombilla de incandescencia normal, incluso la luz blanca brillante emitida desde la superficie del Sol, son ejemplos del mismo fenómeno. La luz emitida por objetos calientes brillantes se denomina *radiación de cuerpo negro*. La experimentamos todos los días y de muchas maneras diferentes. Parece muy normal, de modo que es sorprendente que para entender la radiación de cuerpo negro fuera necesaria una ruptura con la física clásica que abría la puerta a la revolución de la mecánica cuántica. Pero eso es precisamente lo que sucedió.

Se encontró que la radiación de cuerpo negro depende solamente de la temperatura del objeto. Los objetos más calientes irradian más energía, y el máximo del espectro de emisión se desplaza hacia frecuencias de la luz más altas. Como ejemplo, consideremos que se calienta una barra metálica. Al principio parece que no brilla en absoluto. Por supuesto, está emitiendo, pero la radiación se produce principalmente en la región infrarroja del espectro electromagnético, que nuestros ojos no pueden ver. A medida que se calienta más empieza a brillar en un tono rojizo apagado pues su espectro de emisión entra en el rango visible. Calentándola más el color se hace rojo brillante, luego anaranjado, luego amarillo y así sucesivamente a medida que el máximo de su espectro atraviesa la porción visible del espectro electromagnético.

El espectro producido por la radiación de cuerpo negro puede medirse, y esto es lo que hicieron varios investigadores a finales del siglo XIX. Sin embargo, ninguna teoría física en ese momento podía predecir correctamente cómo cambiaría el espectro cuando variara la temperatura. Wilhelm Wien encontró una relación empírica que describía el espectro a altas frecuencias. Sin embargo, no fue capaz de deducir esta relación a partir de las leyes físicas descubiertas previamente, de modo que no tenía una buena base desde el punto de vista conceptual. En otras palabras, la ley de Wien funcionaba, pero nadie sabía por qué. Y lo que es peor, a finales de la última década del siglo se hicieron observaciones del espectro de cuerpo negro a bajas frecuencias que discrepaban por completo de las predicciones de la ley de Wien.

En «Sobre la Ley de Distribución de la Energía en el Espectro Normal», Max Planck fue capaz de resolver esta discrepancia y dedujo una expresión matemática que describía correctamente el espectro de radiación de cuerpo negro para todas las frecuencias. Para ello,

Planck tuvo que hacer lo que ha resultado ser una hipótesis revolucionaria. Supuso que la radiación de cuerpo negro estaba producida por un gran número de osciladores microscópicos y que la energía térmica total del cuerpo negro no estaba distribuida de forma continua entre ellos, sino más bien en porciones finitas y discretas. En otras palabras, la energía estaba «cuantizada» en lo que era un múltiplo entero de una pequeña unidad de energía. Planck demostró que este pequeño elemento de energía es proporcional a la frecuencia del oscilador. La constante de proporcionalidad, a la que llamó  $h$ , se conoce como constante de Planck; es un parámetro fundamental de la mecánica cuántica. Su valor dicta el nivel de escala en donde falla la física clásica y se hace necesaria una teoría de física cuántica.

El segundo fenómeno desconcertante que no podía explicarse por la teoría ondulatoria clásica de la luz se conoce como el efecto fotoeléctrico. A comienzos del siglo xx se había advertido que cuando incide luz sobre metales podía producirse una corriente eléctrica. Hoy día este es un concepto bien conocido y bien utilizado. De hecho, forma parte del proceso por el que las células solares producen electricidad a partir de la luz solar. Sin embargo, en esa época el efecto fotoeléctrico era un misterio. A primera vista, la teoría ondulatoria de la luz proporciona una explicación sencilla. Las ondas luminosas que inciden sobre el metal ceden energía a los electrones en la superficie metálica y los separa de los átomos a los que están ligados. Los electrones quedan libres para moverse y con ello pueden dar lugar a una corriente eléctrica. Según la teoría ondulatoria, cuanto más intensa es la luz, más energía tendrán los electrones. Pero no es esto lo que se observaba. En 1902 Philip Lenard observó que la energía de los electrones liberados es independiente de la intensidad de la luz. Una luz más intensa produce más electrones, pero la energía de un electrón individual no se ve afectada por la intensidad de la luz, sino por su color. Este era un resultado extraño, porque el color (o frecuencia) de las ondas luminosas no debería tener nada que ver con la energía de las ondas. Más extraño aún, había una frecuencia de corte por debajo de la cual no se liberaban electrones cualquiera que fuera la intensidad de la luz. Estos extraños detalles requerían una explicación más allá de la teoría ondulatoria de la luz.

En «Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz», Albert Einstein fue capaz de explicar

el efecto fotoeléctrico utilizando el principio de cuantización de Planck. Propuso la teoría de que la energía en un rayo de luz no estaba distribuida de forma continua sino que consistía en un número finito de «cuantos de energía» que no podían dividirse. Así, la luz monocromática consiste en un número grande pero finito de partículas de luz, cada una de ellas con una energía dada por el producto de la constante de Planck por la frecuencia de la luz. La partícula de luz se denomina ahora *fotón*. Un fotón individual solo puede ser absorbido como una unidad completa. Cuando un electrón absorbe la energía de un fotón, es la energía del fotón, y no la intensidad global, la que determina cuánta energía gana el electrón. En el efecto fotoeléctrico se requiere cierta cantidad de energía para separar un fotón del metal. Si la frecuencia de la luz es demasiado pequeña, entonces ningún fotón tendrá energía suficiente para separar el electrón, sea cual sea el número de cuantos fotones estén presentes (es decir, de la intensidad de la luz). Así pues, con la hipótesis de la cuantización de la energía Einstein pudo explicar los extraños detalles del efecto fotoeléctrico.

Con la publicación de la explicación de Planck de la radiación de cuerpo negro y la explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico, había nacido la teoría de la física cuántica. Dada la naturaleza revolucionaria de lo que se introducía podemos preguntar, «¿De dónde sacó Planck la inspiración para hacer esta hipótesis?». En una conferencia en 1909 en la Universidad de Columbia, titulada «La teoría atómica de la materia», Planck reveló cómo su trabajo en mecánica estadística le llevó a concebir esta brillante hipótesis de la cuantización de la energía. Sin embargo, parece probable que ni Planck ni Einstein entendieron verdaderamente hasta qué grado iba a cambiar la física como resultado de su trabajo, pues ambos se resistieron a algunas de sus consecuencias que acompañaban a la física cuántica una vez que estuvo completamente formada. Veremos en capítulos posteriores que nuestra comprensión del universo y la realidad en un nivel fundamental quedó radicalmente alterada como resultado de la revolución cuántica.

# SOBRE LA LEY DE DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA EN EL ESPECTRO NORMAL

MAX PLANCK\*

Las recientes medidas espectrales realizadas por O. Lummer y E. Pringsheim,<sup>1</sup> y las aún más notables realizadas por H. Rubens y F. Kurlbaum,<sup>2</sup> que en conjunto confirmaban un resultado obtenido anteriormente por H. Beckmann,<sup>3</sup> muestran que la ley de distribución de la energía en el espectro normal, deducida por primera vez por W. Wien a partir de consideraciones cinético-moleculares y posteriormente por mí a partir de la teoría de la radiación electromagnética, no es válida en general.

En cualquier caso la teoría requiere una corrección, y en lo que sigue intentaré hacerla sobre la base de la teoría de la radiación electromagnética que he desarrollado. Para ello será necesario primero encontrar qué término puede cambiarse en el conjunto de condiciones que llevan a la ley de distribución de energía de Wien; entonces será cuestión de eliminar este término del conjunto y hacer una sustitución adecuada del mismo.

En mi último artículo<sup>4</sup> demostré que los fundamentos físicos de la teoría de la radiación electromagnética, incluida la hipótesis de «radiación natural», resisten la crítica más severa; y puesto que hasta

\* «On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum», publicado inicialmente en *Annalen der Physik*, vol. 4 (1901), pp. 553 ss.

1. O. Lummer y E. Pringsheim, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 2 (1900), p. 163.

2. H. Rubens y F. Kurlbaum, *PAW: Sitzungsberichte*, 25 de octubre, 1900, p. 929.

3. H. Beckmann, *Inaugural dissertation*, Tubinga, 1898. Véase también H. Rubens, *Weid. Ann.*, 69 (1899), p. 582.

4. M. Planck, *Ann. d. Phys.*, 1 (1900), p. 719.



donde yo sé no hay errores en los cálculos, sigue siendo válido el principio de que la ley de distribución de la energía en el espectro normal está completamente determinada cuando se consigue calcular la entropía  $S$  de un resonador vibrante, monocromático, irradiado, como función de su energía vibracional  $U$ . Puesto que entonces se obtiene, a partir de la relación  $dS/dU = 1/\theta$ , la dependencia de la energía  $U$  respecto de la temperatura  $\theta$ , y puesto que la energía también está relacionada con la densidad de radiación a la frecuencia correspondiente por una relación sencilla,<sup>5</sup> se obtiene también la dependencia de esta densidad de radiación respecto de la temperatura. La distribución de energía normal es entonces aquella en que las densidades de radiación de todas las frecuencias diferentes tienen la misma temperatura.

En consecuencia, todo el problema se reduce a determinar  $S$  como una función de  $U$ , y es a esta tarea a la que se dedica la parte más esencial de lo que sigue. En mi primer tratamiento de este tema yo había expresado  $S$ , por definición, como una simple función de  $U$  sin más fundamento, y me contenté con demostrar que esta forma de entropía satisface todos los requisitos que le impone la termodinámica. Entonces yo creía que esta era la única expresión posible y que en consecuencia la ley de Wien, que se sigue de ella, necesariamente tenía validez general. Sin embargo, en un análisis posterior más detallado<sup>6</sup> me pareció que debe haber otras expresiones que dan el mismo resultado, y que en cualquier caso se necesita otra condición para poder calcular  $S$  unívocamente. Creí haber encontrado tal condición en el siguiente principio, que entonces me parecía perfectamente plausible: dado un sistema, cerca del equilibrio térmico, compuesto por  $N$  resonadores en el mismo campo de radiación estacionario, el incremento en la entropía total  $S_N = NS$  asociado a un cambio irreversible infinitamente pequeño depende solo de su energía total  $U_N = UN$  y los cambios en esta cantidad, pero no de la energía  $U$  de los resonadores individuales. Este teorema lleva de nuevo a la ley de distribución de energía de Wien. Pero puesto que la última no está confirmada por la experiencia, uno se ve obligado a concluir que tampoco este

5. Comparar con la ecuación (8).

6. M. Planck, *loc. cit.*, pp. 730 ss.

principio puede ser válido en general y por ello debe ser eliminado de la teoría.<sup>7</sup>

Así pues, ahora debe introducirse otra condición que permita el cálculo de  $S$ , y para conseguirlo es necesario examinar con más profundidad el significado del concepto de entropía. La consideración de la insostenibilidad de la hipótesis hecha anteriormente ayudará a orientar nuestras ideas en la dirección indicada por la discusión anterior. En lo que sigue se describirá un método que da una nueva y más sencilla expresión para la entropía y con ello proporciona también una nueva ecuación de radiación que no parece estar en conflicto con ningún hecho hasta ahora determinado.

## I. CÁLCULOS DE LA ENTROPÍA DE UN RESONADOR COMO FUNCIÓN DE SU ENERGÍA

§ 1. La entropía depende del desorden y este desorden, de acuerdo con la teoría de la radiación electromagnética para las vibraciones monocromáticas de un resonador situado en un campo de radiación estacionario, depende de la irregularidad con la que cambian constantemente su amplitud y su fase, siempre que se consideren intervalos de tiempo largos comparados con el periodo de vibración pero pequeños comparados con la duración de una medida. Si tanto la amplitud como la fase permanecieran absolutamente constantes, lo que significa vibraciones completamente homogéneas, no podría existir entropía y la energía vibracional tendría que estar completamente libre para convertirse en trabajo. Por consiguiente, la energía constante  $U$  de un único resonador vibrante estacionario debe tomarse como un promedio temporal o, lo que es lo mismo, como un promedio simultáneo de las energías de un gran número  $N$  de resonadores idénticos, situados en el mismo campo de radiación estacionario y suficientemente separados para que no puedan influir unos en otros directamente. En este sentido es en el que nos referiremos a la energía promedio  $U$  de un único resonador. Entonces, a la energía total

7. Además habría que comparar las críticas hechas previamente a este teorema por W. Wien (*Report of the Paris Congress*, 2, 1900, p. 40) y por O. Lummer (*loc. cit.*, 1900, p. 92).

$$U_N = UN \quad (1)$$

de dicho sistema de N resonadores corresponde una cierta entropía total

$$S_N = NS \quad (2)$$

del mismo sistema, donde S representa la entropía media de un único resonador y la entropía  $S_N$  depende del desorden con el que la energía total  $U_N$  está distribuida entre los resonadores individuales.

§ 2. Ahora hacemos la entropía  $S_N$  del sistema proporcional al logaritmo de su probabilidad W, salvo una constante aditiva arbitraria, de modo que los N resonadores en conjunto tienen la entropía  $S_N$ :

$$S_N = k \log W + \text{constante.} \quad (3)$$

En mi opinión esto sirve realmente como una definición de la probabilidad W, puesto que en las hipótesis básicas de la teoría electromagnética no hay una prueba definida para semejante probabilidad. La adecuación de esta expresión es evidente de entrada, a la vista de su simplicidad y estrecha relación con un teorema de la teoría cinética de los gases.<sup>8</sup>

§ 3. Ahora se trata de encontrar la probabilidad W de modo que los N resonadores juntos posean la energía vibracional  $U_N$ . Además es necesario interpretar  $U_N$  no como una cantidad continua, infinitamente divisible, sino como una cantidad discreta compuesta de un número entero de partes finitas iguales. Llamemos a cada una de estas partes el elemento de energía  $\epsilon$ ; en consecuencia debemos poner

$$U_N = P\epsilon, \quad (4)$$

donde P representa en general un entero grande, mientras que el valor de  $\epsilon$  es todavía incierto.

Ahora es evidente que cualquier distribución de los P elementos de energía entre los N resonadores solo puede dar como resultado un número definido, entero y finito. Llamamos a cada una de estas for-

8. L. Boltzmann, *Wiener Ber.*, (II) 76 (1877), p. 428.

mas de distribución, siguiendo una expresión utilizada por L. Boltzmann para una idea similar, una «compleción». Si se denotan los resonadores por los números 1, 2, 3, ... N, y se escriben uno al lado de otro, y si bajo cada resonador se pone el número de elementos de energía asignados al mismo por alguna distribución arbitraria, entonces se obtiene para cada compleción individual una pauta de la forma siguiente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Aquí suponemos  $N = 10$ ,  $P = 100$ . El número  $R$  de todas las compleciones posibles es obviamente igual al número de disposiciones que se pueden obtener de este modo para la fila inferior, para  $N$  y  $P$  dados. Por claridad deberíamos señalar que dos compleciones deben considerarse diferentes si las correspondientes series de números contienen los mismos números pero en un orden diferente.

De la teoría combinatoria se obtiene que el número de compleciones posibles es:

$$R = \frac{N(N+1)(N+2)\cdots(N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

Ahora, según el teorema de Stirling, tenemos en primera aproximación

$$N! = N^N.$$

En consecuencia, la aproximación correspondiente es

$$R = \frac{(N_X + P)^{N+P}}{N^N \cdot P^P}.$$

§ 4. La hipótesis que queremos establecer como base para cálculos posteriores reza lo siguiente: para que los  $N$  resonadores posean colectivamente la energía vibracional  $U_N$ , la probabilidad  $W$  debe ser proporcional al número  $R$  de todas las compleciones posibles formadas

por distribución de la energía  $U_N$  entre los  $N$  resonadores; o en otras palabras, cualquier complejión dada es tan probable como cualquier otra. Que esto ocurra realmente en la naturaleza solo se puede probar, en última instancia, por la experiencia. Pero si la experiencia decidiera finalmente a su favor, sería posible extraer más conclusiones de la validez de esta hipótesis sobre la naturaleza particular de las vibraciones de los resonadores; a saber, en la interpretación propuesta por J. V. Kries<sup>9</sup> con respecto al carácter de las «amplitudes originales, comparables en magnitud pero independientes unas de otras». Tal como están las cosas, desarrollos adicionales a lo largo de estas líneas parecen prematuros.

§ 5. De acuerdo con la hipótesis introducida en relación con la ecuación (3), la entropía del sistema de resonadores en consideración es, tras la determinación adecuada de la constante aditiva:

$$\begin{aligned} S_N &= k \log R \\ &= k \{ (N + P) \log (N + P) - N \log N - P \log P \} \end{aligned} \quad (5)$$

y considerando (4) y (1):

$$S^N = kN \left\{ \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right\}.$$

Así pues, de acuerdo con la ecuación (2) la entropía  $S$  de un resonador como función de su energía  $U$  está dada por:

$$S = k \left\{ \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right\}. \quad (6)$$

## II. INTRODUCCIÓN DE LA LEY DE DESPLAZAMIENTO DE WIEN

§ 6. Después del teorema de Kirchoff de la proporcionalidad entre las

9. J. V. Kries, *The Principles of Probability Calculation* (Friburgo, 1886), p. 36.

potencias de emisión y absorción, la denominada ley de desplazamiento conocida por el nombre de su descubridor W. Wien,<sup>10</sup> que incluye como caso especial la ley de Stefan-Boltzmann de dependencia de la radiación total con respecto a la temperatura, proporciona la contribución más valiosa a los firmemente establecidos fundamentos de la teoría de la radiación. En la forma dada por M. Thiesen<sup>11</sup> se lee como sigue:

$$E \cdot d\lambda = \theta^5 \psi(\lambda\theta) \cdot d\lambda,$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $E \cdot d\lambda$  representa la densidad de volumen de la radiación de «cuerpo negro»<sup>12</sup> dentro de la región espectral entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ ,  $\theta$  representa la temperatura y  $\psi(x)$  representa una cierta función de un único argumento  $x$ .

§ 7. Ahora queremos examinar lo que afirma la ley de desplazamiento de Wien sobre la dependencia de la entropía  $S$  de nuestro resonador respecto de su energía  $U$  y su periodo característico, especialmente en el caso general en donde el resonador está situado en un medio diatermano ordinario. Para ello generalizamos a continuación la forma de Thiesen de la ley de radiación en un medio diatermano con velocidad de la luz  $c$ . Puesto que no tenemos que considerar la radiación total, sino solo la radiación monocromática, se hace necesario para comparar diferentes medios diatermanos introducir la frecuencia  $\nu$  en lugar de la longitud de onda  $\lambda$ .

Así pues, denotemos por  $u d\nu$  la densidad de volumen de energía radiante que pertenece a la región espectral entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ ; entonces escribimos:  $u d\nu$  en lugar de  $E d\lambda$ ;  $c/\nu$  en lugar de  $\lambda$ , y  $c d\nu/\nu^2$  en lugar de  $d\lambda$ . De lo que obtenemos

$$u = \theta^5 \frac{c}{\nu^2} \cdot \psi\left(\frac{c\theta}{\nu}\right).$$

10. W. Wien, *Proceedings of the Imperial Academy of Science*, Berlín, 9 de febrero, 1893, p. 55.

11. M. Thiesen, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 2 (1900), p. 66.

12. Quizá habría que hablar más apropiadamente de radiación «blanca», para generalizar lo que ya se entiende por luz blanca total.

Ahora, según la bien conocida ley de Kirchoof-Clausius, la energía emitida por unidad de tiempo con frecuencia  $\nu$  y a temperatura  $\theta$  desde una superficie negra en un medio diatermano es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad de propagación  $c^2$ ; entonces la densidad de energía  $U$  es inversamente proporcional a  $c^3$  y tenemos:

$$u = \frac{\theta^5}{\nu^2 c^3} \cdot f\left(\frac{\theta}{\nu}\right),$$

donde las constantes asociadas con la función  $f$  son independientes de  $c$ .

En lugar de esto, si  $f$  representa una nueva función de un único argumento, podemos escribir:

$$u = \frac{\nu^3}{c^3} \cdot f\left(\frac{\theta}{\nu}\right) \quad (7)$$

y de esto vemos, entre otras cosas, que como es bien conocido, la energía radiante  $u \cdot \lambda^3$  a una temperatura y frecuencia dadas es la misma para todos los medios diatermanos.

§ 8. Para ir de la densidad de energía  $u$  a la energía  $U$  de un resonador estacionario situado en el campo de radiación y que vibra con la misma frecuencia  $\nu$ , utilizamos la relación que se expresa en la ecuación (34) de mi artículo sobre procesos de radiación irreversibles:<sup>13</sup>

$$K = \frac{\nu^2}{c^2} U$$

( $K$  es la intensidad de un rayo monocromático linealmente polarizado), que junto con la bien conocida ecuación:

$$u = \frac{8\pi K}{c}$$

da la relación:

13. Planck, *Ann. d. Phys.*, 1 (1900), p. 99.

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U. \quad (8)$$

De esto y de la ecuación (7) se sigue:

$$U = u \cdot f\left(\frac{\theta}{\nu}\right)$$

en donde ya no aparece c. En lugar de esto podemos escribir

$$\theta = \nu \cdot f\left(\frac{U}{\nu}\right).$$

§9. Finalmente, introducimos la entropía S del resonador haciendo

$$\frac{1}{\theta} = \frac{dS}{dU}. \quad (9)$$

Entonces obtenemos:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\nu} \cdot f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

e integrado:

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right) \quad (10)$$

es decir, la entropía de un resonador que vibra en un medio diatermano arbitrario depende solo de la variable  $U/\nu$ ; aparte de esta solo contiene constantes universales. Esta es la forma más sencilla que conozco de la ley de desplazamiento de Wien.

§ 10. Si aplicamos la ley de desplazamiento de Wien en la última forma a la ecuación (6) para la entropía S, entonces encontramos que el elemento de energía  $\varepsilon$  debe ser proporcional a la frecuencia  $\nu$ , y así:

$$\varepsilon = h\nu$$



y en consecuencia:

$$S = k \left\{ \left( 1 + \frac{U}{h\nu} \right) \log \left( 1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \log \frac{U}{h\nu} \right\}.$$

Aquí  $h$  y  $k$  son constantes universales.

Sustituyendo en la ecuación (9) se obtiene:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{k}{h\nu} \log \left( 1 + \frac{h\nu}{U} \right)$$

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k\theta} - 1} \quad (11)$$

y de la ecuación (8) se sigue entonces la ley de distribución de energía buscada:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/k\theta} - 1} \quad (12)$$

o introduciendo las sustituciones dadas en §7, en términos de la longitud de onda  $\lambda$  en lugar de la frecuencia:

$$E = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{ch/\lambda k\theta} - 1}. \quad (13)$$

Tengo el proyecto de derivar en otro lugar las expresiones para la intensidad y la entropía de la radiación que se propaga en un medio diatermano, así como el teorema para el incremento de entropía en procesos de radiación no estacionarios.

### III. VALORES NUMÉRICOS

§ 11. Los valores de ambas constantes universales  $h$  y  $k$  pueden calcularse de forma bastante precisa con la ayuda de las medidas disponi-

bles. F. Kurlbaum,<sup>14</sup> que designa por  $S_t$  la energía total radiada al aire en 1 segundo desde 1 centímetro cuadrado de un cuerpo negro a temperatura  $t^\circ\text{C}$ , encontró que:

$$S_{100} - S_0 = 0,0731 \text{ W/cm}^2 = 7,31 \times 10^5 \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s}.$$

De esto se puede obtener la densidad de energía de la radiación total en aire a la temperatura absoluta 1:

$$\frac{4 \cdot 7,31 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10} (373^4 - 273^4)} = 7,061 \cdot 10^{-15} \text{ erg}/(\text{cm}^3 \cdot \text{grado}^4).$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (12) la densidad de energía de la energía radiante total para  $\theta = 1$  es:

$$\begin{aligned} u^* &= \int_0^\infty u d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k\theta} - 1} d\nu = \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 (e^{-h\nu/k\theta} + e^{-2h\nu/k\theta} + e^{-3h\nu/k\theta} + \dots) d\nu, \end{aligned}$$

que integrado término a término da

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot 6 \left( \frac{k}{h} \right)^4 \left( 1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{34} + \frac{1}{44} + \dots \right) \\ &= \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} \cdot 1,0823, \end{aligned}$$

Si hacemos esto igual a  $7,061 \cdot 10^{-15}$ , entonces, puesto que  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s, obtenemos:

$$\frac{k^4}{h^3} = 1,1682 \cdot 10^{15}. \quad (14)$$

14. F. Kurlbaum, *Wind. Ann.*, 65 (1898), p. 759.

§ 12. O. Lummer y E. Pringsheim<sup>15</sup> determinaron que el producto  $\lambda_m \theta$ , donde  $\lambda_m$  es la longitud de onda de máxima energía en aire a temperatura  $\theta$ , es 2.940 micrones·grado. Así, en medida absoluta:

$$\lambda_m = 0,294 \text{ cm} \cdot \text{grado}.$$

Por otra parte, se sigue de la ecuación (13), cuando se hace la derivada de E con respecto a  $\theta$  igual a cero para hallar  $\lambda = \lambda_m$

$$\left(1 - \frac{ch}{5k\lambda_m\theta}\right) \cdot e^{ch/k\lambda_m\theta} = 1$$

y de esta ecuación trascendente

$$\lambda_m\theta = ch/4,9651k$$

y en consecuencia

$$h/k = (4,9651 \cdot 0,294)/3 \cdot 10^{10} = 4,866 \cdot 10^{-11}.$$

De esto y de la ecuación (14) resultan los valores para las constantes universales:

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$$

$$k = 1,346 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grado}.$$

Estos son los mismos números que indiqué en mi anterior comunicación.

15. O. Lummer y E. Pringsheim, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 2 (1900), p. 176.