Biblioteca
STEPHEN HAWKING

EDICIÓN COMENTADA POR

STEPHEN HAWKING

DIOS CREÓ LOS NÚMEROS

Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia

CRÍTICA

DIOS CREÓ LOS NÚMEROS

Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia

Edición comentada por
STEPHEN HAWKING

CRÍTICA
BARCELONA

Primera edición: octubre de 2006
Primera edición en esta nueva presentación: marzo de 2024

Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia
Stephen Hawking

Título original: *God created the integers: The Mathematical Breakthroughs that Changes History*

Los títulos originales de los ensayos que conforman este volumen se hallarán en la «Nota sobre esta edición». La traducción de las distintas secciones «Vida y obra» ha corrido a cargo de Ubaldo Iriso Ariz. Los datos sobre el resto de traducciones se registran también en la mencionada «Nota».

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona (España)
Crítica es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.

editorial@ed-critica.es
www.ed-critica.es

ISBN: 978-84-9199-627-9
Depósito legal: B. 2.024-2024
Impresión y encuadernación: Limpergraf
Printed in Spain - Impreso en España

PEFC Certificado
Este libro procede de bosques gestionados de forma sostenible
PEFC
PEFC/14-38-00305
www.pefc.es

Euclides

(*c*.325-*c*.265 a.C.)

VIDA Y OBRA

Con la posible excepción de Isaac Newton, Euclides es el matemático más conocido de toda la historia. Hasta mediados del siglo XX su única obra conservada, los *Elementos*, fue la más vendida de todos los tiempos, sólo superada por la Biblia. A pesar de ello, parece que Euclides no fue más que un recopilador del conocimiento matemático de su tiempo, una suerte de Noah Webster, el gran lexicógrafo del siglo XIX que dio nombre al diccionario más respetado de América.

Poco es lo que se conoce de su biografía: apenas que enseñó en una academia en Alejandría, la ciudad helénica que Alejandro Magno fundó en la desembocadura del Nilo, en Egipto. En su condición de compilador, Euclides estaba muy familiarizado con la tradición matemática griega que le precedió, y especialmente con su primera crisis: la de los irracionales.

Menos aún es lo que sabemos de Pitágoras, una misteriosa figura que sobresale entre los primeros matemáticos griegos y que murió hacia el año 475 a.C. Sí conocemos algo más de la escuela pitagórica. Según ésta, la totalidad del cosmos podía ser descrita en términos de números enteros: 1, 2, 3… Como Aristóteles escribió: «Los pitagóricos … habiendo sido educados en el estudio de las matemáticas, pensaron que las cosas eran números … y que todo el cosmos era una escala y un número».

El teorema de Pitágoras (que presentamos en este capítulo) así lo demuestra: los pitagóricos descubrieron que pequeños números enteros como 3, 4 y 5 no sólo describían la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, sino que además tenían la propiedad de que si se sumaban las áreas de los cuadrados dibujados sobre los dos lados más pequeños, éstos igualaban el área del cuadrado dibujado sobre el lado más largo —la hipotenusa— el lado opuesto al ángulo recto. Nótese cómo los antiguos griegos enunciaron el teorema de Pitágoras en términos de objetos geométricos ¡y no en términos numéricos!

Y entonces alguien formuló una interesante pregunta. Si hubiera un cuadrado de lado la unidad, y un segundo cuadrado de área doble al área del primer cuadrado, ¿qué relación existiría entre el lado del segundo cuadrado respecto al primer cuadrado? Así fue como surgió originariamente a cuestión de la raíz cuadrada de 2.

Los antiguos egipcios hallaron una buena aproximación a dicha cuestión. El lado del segundo cuadrado es al primer cuadrado casi como 7 es a 5. Ciertamente, esto no debe sorprendernos ya que sabemos bien que 7/5 puede expresarse como 1,4, lo cual es bastante cercano a lo que hoy conocemos como la expresión decimal de $\sqrt{2}$. Pero «bastante cercano» no era suficientemente satisfactorio para los pitagóricos. Después de todo, el teorema no enunciaba que el área de los cuadrados era «próxima a la igualdad», sino que las áreas eran «iguales».

Entonces alguien, cuya identidad desconocemos, realizó una acertada y profunda reflexión. Supongamos que la raíz cuadrada de 2 puede ser expresada como el cociente de dos números enteros y que estos dos números no comparten ningún divisor común excepto 1, la unidad común a todos los enteros. Llamemos a estos números p y q, con la propiedad de que el cuadrado P dibujado sobre el lado de longitud p tiene exactamente el doble del área del cuadrado Q, dibujado sobre el lado de longitud q. Ahora bien, si P contiene doble número de unidades respecto de Q, ¡entonces P debe contener un número par de unidades! Los pitagóricos ya sabían que si un cuadrado contiene un número par de unidades, el número de unidades que este cuadrado contiene debe ser un múltiplo de 4, y sus lados deben contener un número par de unidades de longitud.

Todos sabían cómo, dado un cuadrado, uno podía encontrar otro cuya área fuera una cuarta parte del área del primer cuadrado: basta con dibujar un cuadrado junto al cuadrado original con la mitad de lado. En este caso, tómese un cuadrado T cuyo lado t es la mitad del lado p. Dado que p contiene un número par de unidades de longitud, el lado t debe, pues, contener algún número de unidades enteras de longitud. Pero entonces, si el cuadrado T tiene una cuarta parte del área del cuadrado de P, el cuadrado Q debe contener el doble de unidades de área que el cuadrado T. Dado que el cuadrado T contiene un número par de unidades de área, entonces, y al igual que el cuadrado P, el cuadrado Q debe también contener un número de unidades de área múltiplo de 4. Así, su lado q debería contener un número par de unidades de longitud. Por el momento, este argumento matemático está siendo como un partido de tenis, la pelota va y viene entre los jugadores.

El argumento llega finalmente a su clímax. Empezó suponiendo que los lados p y q no tenían ningún divisor en común excepto el 1, y ha finalizado con una contradicción: ¡comparten el divisor 2! Por más que lo intentaron, los pitagóricos nunca pudieron encontrar un defecto en su argumentación. Sabiendo que, de hecho, nadie ha encontrado la manera de expresar la raíz cuadrada de 2 como el cociente de dos números enteros, los pitagóricos aceptaron la realidad: habían probado que la raíz cuadrada de 2 no podía ser expresada como cociente de dos números enteros.

Y así nacieron los números irracionales, objetos matemáticos que no pueden ser expresados por medio de números enteros; habría que esperar al menos dos milenios más para que llegaran lo que Kronecker llamó «obra del hombre».

Los pitagóricos guardaron cuidadosamente esta demostración como un gran secreto, puesto que había originado una crisis que afectaba incluso a las raíces de su cosmología. Cuando supieron, sin embargo, que uno de sus miembros había divulgado el secreto a alguien externo al círculo, rápidamente hicieron planes para arrojar al traidor por la borda mientras navegaban en alta mar. Quienquiera que fuera ¡ese hombre fue el primer mártir de la historia de las matemáticas!

La crisis de los irracionales sirvió para convencer a los antiguos griegos de que para formar los cimientos del resto de matemáticas y explicar, con ellas, la estructura del cosmos, no podían basarse sólo en la aritmética. Debían mirar igualmente a otros lados; y lo hicieron hacia la geometría.

Los *Elementos* de Euclides son principalmente recordados por su geometría, y especialmente por su tratamiento de las líneas paralelas en la definición de las líneas paralelas:

> Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Y en el quinto postulado, el del paralelismo:

> Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Una forma muy distinta de la que nos han presentado a menudo:

> Dada una línea y un punto fuera de esta línea, es posible dibujar exactamente una linea a través del punto dado, que corra paralela a la línea,

que es una forma equivalente, aunque distinta, de la otorgada por el matemático escocés John Playfair en 1795.

Durante el auge de la era newtoniana, algunos filósofos como Emmanuel Kant nunca dudaron de la certeza del axioma euclidiano. Pero sí se preguntaron sobre la naturaleza de su verdad. ¿El postulado del paralelismo era una verdad del cosmos o era sólo contingentemente verdadera? Por supuesto, desde el advenimiento de la revolución einsteiniana, sabemos que el postulado del paralelismo no es para nada cierto en nuestro cosmos. El cosmos espacio-temporal einsteiniano en el que vivimos es curvo. La geometría euclídea y la física newtoniana son sólo aproximaciones.

Debemos preguntarnos, pues, qué pensaban los griegos sobre la naturaleza de este postulado. Creo que una breve consideración en torno a la concepción del mundo por parte de los antiguos griegos revelará que también ellos lo veían como una ficción útil más que como una descripción verdadera del mundo físico. Después de todo, ellos creían que vivíamos en lo que el historiador científico Alexandre Koyré llamó «universo cerrado», un cosmos esférico en el cual no había líneas rectas que se extendieran hasta el infinito. En ese cosmos, por debajo de la órbita de la Luna, los cuerpos se movían en líneas rectas o bien desde o bien hacia el centro de la Tierra. Por encima de la órbita de la Luna, los cuerpos orbitaban en círculos perfectos alrededor del centro de la Tierra. En definitiva, un cosmos sin espacio para líneas rectas que se extendieran hasta el infinito.

Pero los griegos tenían un problema: necesitaban encontrar una base sólida para sus matemáticas. Los pitagóricos perseguían la aritmética como esa base sólida y se encontraron inmersos en una profunda crisis. Necesitados de una alternativa, otra escuela descendiente de Thales (muerto *c.* 547 a.C.) decidió basar las matemáticas en la geometría. ¡Y acabaron hallando que poco era lo que podían conseguir sin el postulado del de paralelismo! Por ejemplo, nunca pudieron probar el teorema de Pitágoras. De hecho, poco pudieron probar sobre la geometría. Cosa que no debería ser una sorpresa para nosotros, «los modernos», que disponemos del beneficio de 2.500 años de investigaciones y sabemos que el teorema de Pitágoras es falso en geometrías no-euclidianas. Yo diría que los antiguos griegos ya sabían que este postulado sólo era una útil, o mejor aún, una muy útil aproximación.

La demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 no sólo nos trajo la primera crisis matemática, sino también el primer ejemplo del argumento conocido desde entonces como *reductio ad absurdum*, reducción al absurdo. Una segunda muestra de esta forma de argumento aparece en la demostración de Euclides de la infinidad de números primos, prueba que fue ciertamente originada por algún otro matemático.

Un número primo es un entero positivo, como el 3 o el 23, cuyos únicos divisores enteros y positivos son él mismo y la unidad. La demostración de que hay infinidad de números primo es apabullantemente simple. Supongamos que existe el mayor número primo P. Multipliquemos todos los números primos hasta llegar a P (este último también incluido). Sumemos ahora 1. El resultado no es divisible por P, y tampoco es divisible por ninguno de los números primos menores que P porque P y todos los números primos menores que él dividían su propio producto antes de que el 1 fuera sumado. Así que suponer que existe el mayor número primo P lleva a una contradicción. ¡*Reductio ad absurdum*!

Los antiguos griegos se dieron cuenta de que muchos números primos funcionan por parejas, como por ejemplo, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31… A estas parejas se les llama primos gemelos. Los griegos especulaban con que, además de haber infinidad de números primos, había infinidad de números primos gemelos. Sin embargo, no fueron capaces de demostrarlo. Ni ellos, ni nadie hasta el momento.

Tampoco ningún matemático ha sido capaz de refutar la existencia de un número perfecto impar. Un número *perfecto*… ¡suena bastante extraño! ¿Qué es un número perfecto? Pues aquel que es igual a la suma de sus divisores enteros mayores o iguales que 1 pero menores que él mismo, llamados también divisores *propios*. Los antiguos griegos hallaron todos los números perfectos como sigue:

Nótese que la suma de las potencias de 2 desde 1 (que es 2^0) hasta 2^{n-1} es igual a $2^{n-1} - 1$. Tomemos el caso simple para $n = 3$: $1 + 2 + 4 = 7 = 8 - 1$. Y ahora hagamos un poco de aritmética:

$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 2 + 4 &&= 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 7 &= 8 - 1 &&= 2^3 - 2^0 \\ 14 &= 16 - 2 &&= 2^4 - 2^1 \end{aligned}$$

Todas estas columnas suman 28. Escribiendo esta suma de otra manera podemos ver que:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^2 \times (2^0 + 2^1 + 2^2) = 2^2 \times (2^3 - 1)$$

Así que 28 es la suma de sus divisores propios. Nótese cómo estos divisores son todas las primeras potencias de 2 hasta un cierto exponente, luego 1 menos que la siguiente potencia de 2 (llamado divisor decisivo) y, finalmente, dicho divisor decisivo multiplicado por la potencia de 2 hasta ese cierto exponente. Véase además que si 7 no fuera un número primo, entonces 28 no sería igual a la suma de sus divisores propios.

Con estas observaciones, los antiguos griegos habían probado que:

> Si $(2^n - 1)$ es un número primo, entonces $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ es un número perfecto y además, los números perfectos pares deben tener esta forma.

Más de dos milenios más tarde, nadie ha descubierto un número perfecto impar, ni ningún matemático cree que exista. Pero nadie ha sido capaz de demostrarlo.

Los pitagóricos intentaron (infructuosamente) basar las matemáticas en la aritmética. Pero reformular las matemáticas partiendo de la geometría significaba basar la aritmética en la geometría.

Rápidamente, ¿qué es mayor: 7/5 o 10/7? Esto debe haber sido demasiado fácil para usted. Pruebe con ésta y sin calculadora, ¿qué es mayor: 19/12 o 30/19? Intente hacerlo usando sólo la multiplicación, nada de divisiones. La teoría de la proporción de Eudoxo, presentada en el Libro Quinto de los *Elementos* de Euclides proporciona las herramientas necesarias —es decir, la multiplicación— para llegar a una conclusión.

Tras los pasos de Eudoxo (quien murió *c.* 355 a.C.), Euclides planteó el problema de la siguiente manera: considérense 4 magnitudes de valores *a, b, c,* y *d.* ¿Cómo puede uno determinar si la razón de *a* a *b* es mayor, menor, o igual que la razón de *c* a *d*? Eudoxo empezó por establecer que «dos magnitudes tienen una razón si se puede encontrar un múltiplo de una de ellas que supere a la otra». Eudoxo reconoció que si la razón de *a* a *b* es mayor que la razón de *c* a *d*, todos los múltiplos de la razón de *a* a *b* son mayores que el mismo número de múltiplos de la razón de *c* a *d*. Así, Eudoxo se dio cuenta de que todo lo que tenía que hacer era encontrar un múltiplo útil para realizar la comparación, y el problema quedaría resuelto. El múltiplo que escogió fue el producto de *b* por *d*. Multiplicar la razón de *a* a *b* por el producto de *b* y *d* proporciona la razón del producto de *a, b* y *d*, a *b*, o el área de un rectángulo de lados *a* y *d*. Análogamente, multiplicando la razón de *c* a *d* por el producto de *b* y *d* se obtiene la razón del producto de *c, b* y *d*, a *a*, o el área de un rectángulo de lados *c* y *b*.

Por tanto, el área del rectángulo de lados *a* y *b* es mayor que el área del rectángulo de lados *c* y *b* si, y sólo si, la razón de *a* a *b* es mayor que la razón de *c* a *d*. De manera que mientras los Pitagóricos habían fracasado en su intento de aritmetizar la geometría, ¡Eudoxo lograba geometrizar la aritmética con éxito! Por cierto, como 19×19 es mayor que 30×12, 19/12 es mayor que 30/12.

Euclides es el mayor «enciclopedista» de todos los tiempos. Hoy por hoy, matemáticos de distintas especialidades tienen dificultades para entender el trabajo que se lleva a cabo en las fronteras de su propia especialidad, y ninguno osaría editar un compendio sobre el total del conocimiento matemático contemporáneo. Sin embargo, este proyecto persiste como ideal. Así, en la segunda mitad del siglo XX, la comunidad matemática francesa ofreció una tímida imitación de Euclides en la persona de Nicholas Bourbaki. De hecho, Bourbaki no fue ni siquiera una persona. Era el sobrenombre con el que firmaba un colectivo de más de veinte matemáticos franceses que trabajaban en distintas ramas de las matemáticas. Así pues, Euclides sigue siendo, hasta la fecha, nuestro modelo para textos matemáticos.

ELEMENTOS

LIBRO PRIMERO

DEFINICIONES

1. Un punto es lo que no tiene partes.[1]
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.[2]

1. La definición recoge la idea tradicional de punto como aquello que es indivisible en partes. Pero no incurre en el vicio que Aristóteles atribuye a las definiciones habituales en su tiempo, el de definir lo anterior por referencia a lo posterior: el punto como límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como límite del cuerpo sólido (*Tóp.* VI 4, 14bl5-27). También es significativa la opción de Euclides por el término *sēmeîon* para designar el punto. Los pitagóricos habían legado el término *mónas* para indicar la unidad tanto aritmética como geométrica: cuando el contexto lo exigía, la unidad aritmética podía precisarse como *mónas áthetos* (unidad sin posición) y la unidad geométrica como *mónas thésin ékhousa* (unidad con posición) (*vid.* Aristóteles, *Metaf.* Δ 6, 1016bl4-26; Proclo, *Corn.* 95, 12). Pero en la primera mitad del siglo IV a.C. habían empezado a imponerse otras dos denominaciones del punto tomadas al parecer del lenguaje corriente: *stigmḗ* que significaba originariamente «marca», «punción», *y sēmeîon*, que tenía el significado de «signo», «señal» y otros asociados (e.g., «presagio», «síntoma»). Al parecer, en la tradición filosófica prevalece más bien el uso del primero, y en la tradición matemática el uso del segundo. Aristóteles suele emplear *stigmḗ* en el contexto de discusiones filosóficas (e.g., *Metaf.* A 9, 992a20-24; *Fís. 2*, 1, 231a24-26) y recurrir *a sēmeîon* cuando cita proposiciones geométricas (e.g., *Meteor.* Γ 3, 373a3-5; 5, 376a8-9). Por otra parte, los grandes textos geométricos del siglo III, empezando por los *Elementos*, emplearán *sēmeîon* de forma casi sistemática —un uso parecido se encuentra ya en los tratados astronómicos de Autólico—. Más tarde, en los escritos de los comentadores, se olvida esta especialización técnica y reaparece el uso de *stigmḗ* en los contextos geométricos. Con todo, Alejandro de Afrodisia todavía puede recordar las vicisitudes de la tradición: «Los elementos primeros del plano son las líneas, y de las líneas los puntos *[stigmaí]*, que los matemáticos llaman *puntos [sēmeîa]* y ellos <los pitagóricos> mónadas *[mónades]*» (*In Metaf* 55, 20; *Ross*, *Arist. fragm.*, fr. 2). Para más detalles, *vid.* V. Vita, «II punto nella terminologia matematica greca», *Archive for History of Exact Sciences* 27-2 (1982), 101-114; sobre otras definiciones antiguas y modernas del punto geométrico, *vid.* T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclide's Elements*, Cambridge Univ. Press Cambridge, 1926^2, vol. 1, págs. 155-158. A propósito de éste y de otros muchos términos, también puede cotejarse Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, París, 1959.

2. Los griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea recta: la de un hilo tenso, la de un rayo de luz, la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos, *vid.* Ch. Mugler, «Sur l'histoire de quelques définitions de la géométrie grecque»,

5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.[3]
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.[4]
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.[5]
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.

L'antiquité classique 26 (1957), 331-345. Las tres imágenes se combinan para describir la luz celeste y el uso de la necesidad en el mito de Er de la *República* de Platón (X 616b-c). De hecho, estas representaciones subsisten en algunas caracterizaciones de la línea recta que hoy conservamos de los griegos. La tensión *[tásis]* está asociada a la definición de la recta como una línea tendida o estirada *[tetaménē]* hacia los puntos (PROCLO, *Corn.* 110, 18) o hacia los extremos (PAPPO, *Def.* 4). La imagen del rayo óptico está presente en la conocida definición platónica de la recta como la línea cuyo medio intercepta (eclipsa *[epíprosthen]*) ambos extremos, *vid. Parménides* 137e. La tercera imagen se trasluce en la definición de Herón recogida por Proclo: «una línea que permanece fija cuando sus extremos permanecen fijos» (*Com. 110*, 21-22). Suele considerarse que la definición de Euclides es una elaboración de la platónica, pues ésta contendría implícitamente una alusión al sentido de la vista y supondría, asimismo, una asimilación del rayo visual al rayo óptico, connotaciones que Euclides procura evitar. *Vid.*, por ejemplo, T. L. HEATH, ed. cit., 1, 1926², pág. 166; en cambio, MUGLER, art. cit., 1957, pág. 336, discute esta implicación visual de la definición de Platón. En cualquier caso, la definición euclídea parece original, pues, aparte de la definición citada del *Parménides* de Platón, sólo hay constancia de otra definición anterior, recordada y criticada por Aristóteles: la línea es el límite de la superficie (*Top.* VI 4, 14lb2l). También ha llamado la atención la construcción lingüística de la definición: *ex ísou tots eph' heautês sēmeíois keîtai*, en particular el empleo de la expresión adverbial *ex ísou.* Es una expresión frecuente en Platón y en Aristóteles, y suele tener el sentido de «por igual», «en pie de igualdad». Cabe considerar que el dativo *toîs... sēmeíois* está relacionado con *ex ísou* o con *keîtai*: en el primer caso, resulta la versión adoptada aquí; en el segundo caso se diría más bien que la línea recta está simétricamente determinada por sus puntos, noción que envuelve un aspecto de dirección. Los geómetras griegos, efectivamente, se refieren a la línea AB o a la línea BA como a una misma línea. Pero es dudoso que esta identificación intuitiva descanse en alguna suposición de simetría o de reversibilidad —la conciencia de éstos y otros presupuestos lógicos sólo irá aflorando con el desarrollo moderno de la geometría euclidiana—. Por lo demás, esta definición euclídea de línea recta es un intento de explicar una noción tan simple que se resiste a una formulación cabal y precisa, y la misma suerte espera a otros ensayos en el mismo sentido. No obstante, si alguna definición griega ha tenido especial fortuna, ha sido la aportada por Arquímedes como una de las asunciones de *Sobre la esfera y el cilindro:* «la recta es la más corta *[elakhístēn]* de todas las líneas que tienen los mismos extremos».

3. La palabra *epipháneia* fue usada por Euclides y escritores posteriores para denotar «superficie» en general, mientras que *epípedon* se utilizó para significar «superficie plana» (*vid. infra*, Def. *7*). *Epipháneia* parece haber designado originariamente la apariencia visible de un cuerpo sólido; los pitagóricos llaman a la superficie *chro(i)á*, *i.e.* «piel», como testifica Aristóteles (*Acerca de la sensación* 3, 439a31), aunque olvida el significado anterior de *chro(i)á y* le da el de *color*, que había prevalecido posteriormente. Con todo, el primer testimonio del uso de *epipháneia* en un contexto geométrico bien podría ser el del frag. 68 B 155 de Demócrito. Platón y Aristóteles emplean indistintamente este término y *epipedon* para designar la superficie. El uso de *epipháneia* se fija con Autólico y Euclides. La definición sienta su carácter bidimensional y la Def. 2 del libro XI establecerá su condición de límite del cuerpo sólido: ambos aspectos de la superficie eran familiares para Aristóteles (*vid.*, *e.g.*, *Tóp.* VI 4, 141b22; *Metaf. M 9*, 1085al1).

4. Esta definición, como puede apreciarse fácilmente, está calcada sobre la Def. 4 *mutatis mutandis:* «línea recta» y «puntos» son reemplazados por «superficie plana» y «rectas», respectivamente. Por lo demás, no es extraño que las nociones asociadas a la línea recta se quieran extender a la superficie plana, e.g.: la superficie plana es «la tendida o estirada», «la menor superficie de todas las que tienen los mismos límites» (*vid.* PROCLO, *Corn.* 117, 2-13). Sobre los problemas derivados y otras cuestiones conexas, *vid. T.* L. HEATH, ed. cit., 1926², 1, págs. 172-176.

5. La expresión *mḗ ep' eutheías keiménōn*... («y no están en línea recta») resulta sorprendente, teniendo en cuenta que el ángulo puede estar formado por rectas o curvas. Parece como si Euclides hubiera pensado al

10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes[6] iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.
13. Un límite es aquello que es extremo de algo.[7]
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.[8]
16. Y el punto se llama centro del círculo.
17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.[9]

---

principio definir el ángulo rectilíneo y hubiera tomado después en consideración los ángulos formados por una recta y una curva o por dos curvas, con lo que se ve llevado a sustituir «líneas rectas» por «líneas».

Al parecer, el uso de *klísis* «inclinación» es una innovación de Euclides, frente a la tradición anterior presente en Aristóteles que relacionaba el ángulo con la idea de «fractura» *klásis.* Para otras definiciones, *vid.* HEATH, ed. cit., 1926², 1, págs. 176 ss. Por otra parte, Euclides considera solamente los ángulos convexos (menores que dos rectos), lo mismo que en la definición 19 sólo se refiere a polígonos convexos. Aunque los griegos sólo tomaron en consideración los ángulos y polígonos convexos, se encuentra la distinción entre las dos clases en la definición 34 de Herón y en el comentario de Proclo (PROCLO, *Corn. 165*, *21*) se trata de polígonos cóncavos con ángulos entrantes.

6. *Ephexês*, *i.e.* «en serie», «uno tras otro» es la palabra utilizada generalmente para ángulos adyacentes.

7. Límite: *hóros*; extremo: *péras.*

8. *Hē kaleîtai periphéreia* («*que* se llama circunferencia») se considera una interpolación, al igual que la frase no traducida: *pros tén toû kyk1ou periphéreian* («hacia la circunferencia del círculo») que aparece en algunos mss. hacia el final de la definición. Heiberg las suprime porque, a pesar de que esos mss. las tienen, las fuentes más antiguas (Proclo, Tauro, Sexto Empírico, Boecio) las omiten. El descubrimiento del papiro Herculanense núm. 1061 que presenta también la definición sin las palabras en cuestión confirma la postura de Heiberg (*vid.* J. L. HEIBERG, «Paralipomena zu Euklid», *Hernies* XXXVIII [1903], 47). Las palabras fueron añadidas seguramente debido a la aparición de *periphéreia* «circunferencia» en las definiciones 17 y 18 sin ninguna explicación. Pero en realidad no es necesaria. Pues, aunque la palabra no aparece en Platón, Aristóteles la utiliza varias veces: 1. En el sentido general de «contorno», sin un significado específicamente matemático; 2. En sentido matemático, para referirse tanto a la circunferencia como a un arco o a un círculo.

Por eso Euclides podía usar perfectamente la palabra en las definiciones 17 y 18 sin definirla, porque se trataba de una palabra universalmente conocida y que no tenía de suyo referencia matemática. Debe añadirse que Al-Nayrīzī no incluye en su texto las palabras suprimidas por Heiberg e intenta explicar la omisión de la palabra circunferencia.

Por otra parte, la definición de círculo no contiene nada nuevo en sustancia. PLATÓN en *Parménides* 137e dice: *stróngylón ge poú esti toûto*, *hoû àn tà éschata pantachêi apó toû mésou íson apéchei:* «Redondo es aquello cuyos extremos están en todas las direcciones a igual distancia del medio». En Aristóteles encontramos las siguientes expresiones: «La figura plana rodeada por una línea circular» *peripherógramon* (*De caelo* II 4, 286b13-16); «Plano regular desde un centro *[epípedon tò ek toû mésou íson]*» (*Retórica 111* 6, 1407b27) refiriéndose al círculo. Compara también con el círculo «cualquier otra figura que no tenga iguales las líneas desde el centro, por ejemplo una figura ovalada» (*Sobre el cielo* II 4, 287a19).

La palabra *kéntron*, «centro» se usaba también regularmente: *vid*. la referencia de Proclo a los *lógia* «oráculos» que declaran: «el centro desde el que todas las (líneas tendidas) hasta el borde son iguales...» (*Com.* 155, 4-5).

9. *Diámetros* es la palabra empleada regularmente por Euclides también para cuadrados y paralelogramos. *Diagōniōs*, «diagonal», es un término tardío definido por HERON (*Def.* 67) como la línea recta dibujada

18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.[10]
20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.[11]
21. Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras.[12]
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.[13]

---

de un ángulo a otro. Las últimas palabras, «recta que también divide al círculo en dos partes iguales», son omitidas por Simson y los editores que le siguen. Pero son necesarias aunque no pertenecen a la definición sino que sólo expresan una propiedad del diámetro tal como ha sido definido. Pues, sin esta explicación, Euclides no habría tenido justificación al definir un semicírculo como una porción de círculo limitada por el diámetro y la circunferencia cortada por él.

10. La distinción entre figuras triláteras, cuadriláteras y multiláteras es probablemente una aportación del propio Euclides. *Trípleuron*, *tetrápleuron*, *polýpleuron* no aparecen en Platón ni en Aristóteles. Con el uso de *tetrápleuron*, Euclides acaba con la ambigüedad del término *tetrágōnon* que empieza a utilizarse restrictivamente para el *cuadrado.*

11. *Isoskelés* («de piernas iguales») es usado por Platón y Aristóteles. *Skalenós* con su variante *skalenē̃s* lo usa Aristóteles para referirse a un triángulo que no tiene dos lados iguales. Platón utiliza el término *scalenós* para un número impar por oposición a *isoskelē̃s* para un número par. Proclo pone en relación *scalenós* con el verbo *skádsō* («cojear»). Otros lo relacionan *con skoliós*, *i.e.* «torcido», «defectuoso».

12. Cuadrado: *tetrágōnon. Tetrágōnon* designaba ya el cuadrado entre los pitagóricos (*vid.* Aristóteles, *Metafísica* 986a26). Y este mismo significado es el más frecuente en Aristóteles; pero en *Sobre el alma* II 3, 414b31, parece significar «cuadrilátero»; por otra parte, la alusión de *Metafísica* 105462, *a tetrágōna* «iguales» y «equiangulares» ha de referirse a cuadriláteros para que «equiangular» alcance a tener algún sentido. Aunque al introducir *tetrápleuron* para designar el cuadrilátero Euclides permitió evitar la ambigüedad, hay huellas del antiguo uso de *tetrágōnon* en autores mucho más tardíos.

La palabra *rómbos* («rombo») parece derivar de *rémbō* («dar vueltas») y se utilizaba para designar, entre otras cosas, la peonza. Arquímedes usa la expresión «rombo sólido» para referirse a la figura sólida formada por dos conos con una base circular común. Si los conos son iguales, la sección a través del eje común podía ser un rombo plano. Aunque en Arquímedes los conos no tienen por qué ser iguales, es posible que el sólido del que fue tomado el nombre originariamente estuviera formado por dos conos iguales y Arquímedes lo habría extendido a otros casos.

13. *Parállēloí eisin eutheîai*, *haítines en tôi autôi epipédōi oûsai kai ekballómenai eis ápeiron eph' ekátera tà mérē epí mēdétera sympíptousin allēlais. Parállēlos*, como tal término compuesto, no aparece en Platón, pero ya tiene un uso habitual en tiempos de Aristóteles. En «*ekballómenai eis ápeiron* (siendo prolongadas *indefinidamente*)», la expresión *eis ápeiron* se debe tomar en el sentido adverbial indicado, no como si designara una región o apuntara hacia un lugar («al infinito»); lo mismo cabe decir de la expresión *ep' ápeiron* que a veces sustituye a la anterior. «En ambos sentidos» es la versión de *eph' ekátera tà mérē*, cuya traducción menos libre sería: «hacia ambas partes (por ambas partes)».

POSTULADOS

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.[14]
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.[15]
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.[16]
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos. [17]

Euclides opta por la característica de no intersección o no encuentro como criterio determinante de las rectas coplanarias paralelas. No era la única opción conocida por los griegos ni, al parecer, fue la más frecuente. A primera vista resultaba más natural el criterio de equidistancia, preferido por Posidonio o Gémino, entre otros (Proclo, *Corn.* 176, 5 ss.). Conforme a este criterio, son paralelas las rectas coplanarias que no convergen ni divergen y, así, todas las perpendiculares trazadas de una a otra son iguales. También se ha especulado con un posible criterio de igual dirección, mencionado por Filopón (*vid.* T. L. Heath, ed. cit., 1926^{2}, 1, págs. 191-192). En cualquier caso, la opción de Euclides por este criterio de no intersección y la asunción complementaria del postulado 5, con ser menos intuitivas, son más adecuadas y evitan la falacia de probar la existencia de rectas paralelas sobre la base de algún supuesto derivado justamente de esa misma existencia —Aristóteles había denunciado una petición de principio de este tipo en planteamientos coetáneos de las paralelas, *A. Pr.* 11 16, 65a1-9—. El criterio de no intersección y el criterio de equidistancia convenientemente formulados resultan lógicamente equivalentes. *Vid.* R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean Revolution*, Boston-Basilea-Stuttgart, 1987, cap. 4, págs., 118 ss.

14. *Apó pantòs sēmeîou epì pân semeîon...* dice literalmente: «de todo punto a todo punto». Los griegos, en afirmaciones generales de este tipo, no decían, como solemos hacer nosotros, «cualquier punto», «cualquier triángulo», etc., sino «todo punto», «todo triángulo», etc.

15. Traduzco *peperasménē* por «finita» porque los términos «delimitada» o «limitada», aplicados a una recta, se refieren más bien a lo que nosotros entendemos por un segmento de recta.

16. *Diástēma*, «distancia», es la palabra usada en geometría para el radio determinado con que se describe un círculo. Su uso se debe a que todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro. Los griegos no tienen un término equivalente a *radio*, normalmente utilizan la expresión *hai ek toû kéntrou* (*agómenai grammaí*), *i.e.* «las (líneas trazadas) desde el centro». El término «radio», *radius*, aparece por primera vez en Pierre de la Ramée (P. Ramus, siglo xvi) y se usará ya comunmente desde Vieta. Por lo demás, en geometría esférica, *diástēma* hace referencia no sólo al círculo, sino también a la esfera. (Autólico, 6.)

17. Ninguna proposición de los *Elementos* ha tenido una vida tan agitada como la de este célebre postulado. Por lo regular, ha corrido el albur de un estatuto incierto. Fue asumido como postulado por la tradición adelardiana y por Campano, así como por varios editores y comentadores renacentistas, e.g.: Zamberti (1505), Luca Paccioli (1509), Tartaglia (1543), Commandino (1572). Otros muchos, quizás a partir de la *editio princeps* de Grynaeus (1533), prefieren incluirlo entre las nociones comunes, e.g.: F. Candalla (1556), Clavio (1574), Vitale (1682), Gregory (1703). Pero el trance más radical, el de pasar por una proposición necesitada de prueba, fue una amenaza que se cernió sobre él desde un principio. «Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolemeo se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: La proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema» (Proclo, *Corn.* 191, 21 ss.). Proclo alude al parecer al teorema I 17: la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos rectos, pues el postulado 5 equivale a decir que las rectas, al llegar a encontrarse por el lado correspondiente a los ángulos cuya suma es menos que dos ángulos rectos, forman un triángulo. «En el caso presente —continúa Proclo un poco más adelante—, el hecho de que las rectas convergen cuando los ángulos rectos son minorados, es cierto y necesario; por contra, la afirmación de que como convergen más y más a medida que se prolongan, llegarán alguna vez a encontrarse, es una afirmación verosímil pero no es necesaria a falta de un argumento que pruebe que esto es verdad acerca de las líneas rectas. Pues el hecho de que

NOCIONES COMUNES

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.[18]
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.[19]

---

haya algunas líneas que se aproximan indefinidamente pero permanecen sin tocarse *[asýmptotoi]*, por más improbable y paradójico que parezca, también es cierto y está completamente comprobado en relación con líneas de otro tipo. ¿Por qué en el caso de las rectas no es posible lo mismo que ocurre con las líneas mentadas?» (*Com.* 192, 13-22). Entre las proposiciones, lógicamente equivalentes al postulado euclídeo, que se fueron explicitando a lo largo del proceso se suelen destacar las siguientes (junto con algún portavoz caracterizado):

(i) La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos (resultado cuya relación con la teoría de las paralelas ya era conocida en tiempos de Aristóteles, cf. *Elementos* 132; SACCHERI, 1733).

(ii) Las rectas paralelas son equidistantes (atribuido a Posidonio); todos los puntos equidistantes de una línea recta, situados a un lado determinado de ella, constituyen una línea recta (CLAVIO, 1574).

(ii') Dos rectas paralelas guardan entre sí una distancia finita (Proclo).

(ii") Las rectas no equidistantes convergen en una dirección y divergen en la opuesta (THĀBIT IBN QURRA, h. 826-901; CATALDI, 1603).

(iii) Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela TOLEMEO; ALHAZEN, h. 965-1041; popularizado por J. Playfair', a finales del siglo XVIII).

(iv) Sobre una recta finita siempre se puede construir un triángulo semejante a un triángulo dado (J. WALLIS, 1663; A. M. LEGENDRE, 1824); existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes —con sus respectivos ángulos iguales— (SACCHERI, 1733).

(v) En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto (A. C. CLAIRAUT, 1741; J. H. LAMBERT, 1766).

(vi) Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada (K. F. GAUSS, 1799).

(vii) Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos (A. M. LEGENDRE, 1824; F. BOLYAI, 1832).

(viii) No hay patrón métrico absoluto de longitud (K. F. GAUSS, 1816).

Para más detalles sobre algunas de estas proposiciones y sobre otras de análoga condición, puede verse T. L. HEATH, ed. cit., 1926², 1, págs. 204-220.

18. Esta proposición es seguramente la más conocida de las nociones comunes o axiomas —según Proclo, ambas expresiones son sinónimas para Aristóteles y para los geómetras, aunque los *Elementos* nunca hablan de «axiomas *[axiómata]*» y Aristóteles prefiere hablar de unos prin*cipios [archaí]* o premisas comunes *[tà koiná]* o primordiales *[tà prôtal]*—. Sin embargo, la citada con mayor frecuencia por parte de Aristóteles, en particular, es la noción común tercera. Las nociones comunes se distinguen, como es bien sabido, por su calidad de principios no sólo verdaderos y palmarios, sino indemostrables. Con todo y con esto, Apolonio al parecer trató de demostrarlos —confusión que lamenta PROCLO (*Corn.* 194, 10-12)—. Su prueba de esta noción común discurriría como sigue: «Sea A igual a B y esta última igual a Γ. Digo que A también es igual a Γ. Dado que A, siendo igual a B, ocupa el mismo espacio que ella, y dado que B, siendo igual a Γ, ocupa el mismo espacio que ella, A también ocupa el mismo espacio que Γ. Por consiguiente, son iguales entre sí» (*Com.* 195, 1-5). Proclo señala que este argumento supone dos asunciones previas: a) las cosas que ocupan el mismo espacio, son iguales; b) dos cosas que ocupan el mismo espacio que una tercera, ocupan a su vez el mismo espacio la una que la otra; por último, hace notar que ni a) ni b) son proposiciones más claras e inmediatas que las proposiciones que tratan de establecer. Ante la desmesura de venir a demostrar lo indemostrable, K. von Fritz ha sugerido que la intención de Apolonio era más bien la de probar la transitividad de la congruencia en el caso de las líneas precisamente a partir de la noción común 1 (*vid.* su artículo: «Die ARXAI in der griechischen Mathematik», *Archive für Begriffsgeschichte* 1 (1955), págs. 65, l00). En los modernos sistemas lógicos de identidad, la ley correspondiente a esta noción común 1 es derivable de otras leyes de la relación de identidad como la simetría y la transitividad (*vid.*, por ejemplo, el clásico A. TARSKI (1940), *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Madrid, 1968²; § 187, pág. 84).

19. Heiberg atetiza las nociones comunes 4, 5, 6: 4. «Y si se añaden cosas iguales a cosas desiguales los totales son desiguales»; 5. «Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí»; 6. «Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí».

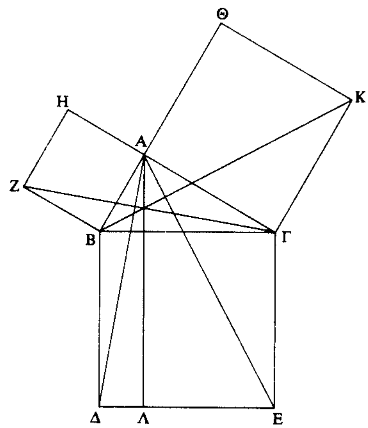
7. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
8. Y el todo es mayor que la parte.[20]

PROPOSICIÓN 47

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Sea ΑΒΓ el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto ΒΑΓ.

Digo que el cuadrado de ΒΓ es igual a los cuadrados de ΒΑ, ΑΓ.



Trácese pues a partir de Br el cuadrado ΒΔΕΓ, y a partir de ΒΑ, ΑΓ los cuadrados ΗΒ, ΘΓ [I, 46], y por el (punto) Α trácese ΑΔ paralela a una de las dos (rectas) ΒΔ, ΓΕ; y trácense ΑΔ, ΖΓ. Y dado que cada uno de los ángulos ΒΑΓ, ΒΑΗ es recto, entonces en una recta cualquier ΒΑ y por un punto de ella, Α, las dos rectas ΑΓ, ΑΗ, no colocadas en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; por tanto, ΓΑ está en línea recta con ΑΗ [I, 14]. Por la misma razón, ΒΑ también está en línea recta con ΑΘ. Y como el ángulo ΔΒΓ es igual al (ángulo) ΖΒΑ —porque cada uno (de ellos) es recto— añádase a ambos el (ángulo) ΑΒΓ; entonces el (ángulo) entero ΔΒΑ es igual al (ángulo) entero ΖΒΓ [N. C. 2]; y como ΑΒ es igual a ΒΓ, y ΖΒ a ΒΑ, los dos (lados) ΔΒ, ΒΑ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΖΒ, ΒΓ; y el ángulo ΔΒΑ es igual al ángulo ΖΒΓ; entonces la base ΑΔ es igual a la base ΖΓ, y el triángulo ΑΒΔ es igual al triángulo ΖΒΓ [I, 4]; y el paralelogramo ΒΛ es el doble del triángulo ΑΒΔ: porque tienen la misma base ΒΔ y están entre las mismas paralelas ΒΔ, ΑΛ [I, 41]; pero el cuadrado ΗΒ es el doble del triángulo ΖΒΓ: porque tienen a su

---

Proclo, observando que no se deben multiplicar los axiomas sin necesidad, indica que deben ser rechazados todos los que se siguen de los cinco admitidos por él (las cinco nociones comunes recogidas en el texto). Por ejemplo, menciona la noción común 5 como una de las que deben ser excluidas por seguirse de la primera. Según una observación de Simplicio recogida por Al-Nayrīzī, sólo había tres axiomas en los mss. más antiguos, pero se fueron añadiendo otros con posterioridad. El furor por la explicitación de supuestos y la falta de elegancia deductiva llevarán a algún comentador moderno a formular no menos de treinta anxiomas euclidianos.

20. Heiberg suprime también la noción común 9: «Dos rectas no encierran un espacio». Proclo la cita mo uno de los ejemplos de multiplicación innecesaria de axiomas y señala además como objeción a éste que pertenece al ámbito específico de la geometría y no es de carácter general. El axioma es innecesario por estar incluido en el significado del postulado 1.

Seguramente se incluyó a partir del pasaje interpolado de I 4: «Y si la base ΒΓ no coincide con la base ΕΗ, dos rectas encerrarán un espacio, lo cual es imposible». Algunos mss. incluyen esta noción común: V, b, p. E incluso otros, P y F, lo introducen después del postulado 5, proceder que sigue Campano. Stamatis lo mantiene en este lugar.

vez la misma base ZB y están entre las mismas paralelas ZB, HΓ [I, 41]; [pero los dobles de cosas iguales son iguales entre sí];[21] por tanto, el paralelogramo BΛ es también igual al cuadrado HB. De manera semejante, trazando las (rectas) ΔE, BK se demostraría que también el paralelogramo ΓΛ es igual al cuadrado ΘΓ; por tanto, el cuadrado entero BΔEΓ es igual a los cuadrados HB, ΘΓ [N. C. 2]. Asimismo, el cuadrado BΔEΓ ha sido trazado a partir de BΓ, y los (cuadrados) HB, ΘΓ a partir de BA, AF. Por tanto, el cuadrado del lado Br es igual a los cuadrados de los lados BA, AΓ.

Por consiguiente, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. Q. E. D.[22]

LIBRO QUINTO

DEFINICIONES

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.[23]

21. Heiberg suprime las palabras *tà dè tôn ísōn diplásia ísa allḗlois estin.* Aluden a una noción común interpolada. Véase la nota 19.

22. Según Proclo (*Com.* 426, 6-15): «Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento. Por mi parte, aunque admiro a los que conocieron primero la verdad de este teorema, más me maravilla el autor de los *Elementos*, no sólo por establecerlo mediante una clara demostración, sino por haber sentado en el libro sexto (VI, 31) una proposición aún más general con las pruebas incontestables de la ciencia». Esta apreciación de Proclo se ha hecho incluso más sabia con el paso del tiempo. Hoy podemos reconocer que las nociones tendenciosamente llamadas «triángulo pitagórico» (*i.e.* el triángulo rectángulo en el que los tres lados son proporcionales a 3 enteros x, y, z que satisfagan la condición del «teorema de Pitágoras»: $x^2 + y^2 = z^2$), o «triplo pitagórico» —*i.e.* cualquier triplo de enteros $<x, y, z>$ que satisfaga la misma condición—, eran nociones familiares para las matemáticas prehelénicas y no estaban ausentes de otras culturas muy dispares. Hay usos de los triángulos y de los triplos «pitagóricos» entre los *harpedonáptai* egipcios (p. Berlín 6619), en el texto cuneiforme Plimpton 322 (que corresponde a la dinastía de Hammurabi); en los *Sulvasutras*, manuales indios de construcción de altares (compuestos hacia 500-200 a.C., aunque se hagan eco de conocimientos anteriores); en el capítulo noveno de la colección china de problemas «Nueve capítulos sobre el arte de la matemática» (escrito durante el período Han, entre el 200 a.C. y el 220 d.C.). Van der Waerden, a la luz de estos datos, ha llegado a conjeturar la existencia de una tradición ramificada (egipcia, babilonia, india, griega, china), derivada de un origen común que se remontaría al neolítico europeo, *vid.* B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Anjeient Civilizations*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1983, caps. 1-2, págs. 1-69. Su conjetura también se remite a la hipótesis de Seidenberg del origen ritual de la geometría, en particular en el caso indio, *vid.* A. Seidenberg, «The ritual origin of Geometry», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), 69-82; «The origin of Mathematics», *ibid.* 18 (1978), 301-342. Pero no hay constancia de que las comprobaciones y reglas prácticas que acompañan a veces a los triplos babilonios e indios fueran demostraciones propiamente dichas; tampoco la hay de que el resultado o «teorema» de Pitágoras se sentara deductivamente como un teorema efectivo.

23. *Méros* «parte» se utiliza en los *Elementos* en dos sentidos: a) el más general de la noción común 5: «El todo es mayor que la parte»; b) como aquí, con el significado más restringido de lo que hoy llamaríamos

2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.[24]
4. Se dice que guardan azón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.[25]

«submúltiplo» o «parte alícuota». En este mismo sentido se utiliza en VII, Def. 3, cuya única diferencia con esta definición es el uso de «número» en lugar de «magnitud».

Aristóteles, *Metafísica* 1023b12, hace la siguiente precisión: «Se llama parte en un sentido aquello en que puede ser dividida una cantidad (pues siempre lo que se quita de una cantidad en cuanto cantidad se llama parte de ella: por ejemplo se dice que dos es en cierto sentido parte de tres) y en otro sentido se llama parte sólo a aquellas de entre ellas que miden al todo».

La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas.

24. *Schē̂sis katà pēlikótēta*, «relación con respecto a su tamaño». El sentido más común de *pēlíkos* es «cuán grande» referido con frecuencia a la edad. Nicómaco distingue entre *pēlikos* referido a magnitud y *posós* referido a cantidad. Jámblico, a su vez, establece la diferencia entre *pēlícon*, que es continuo, como objeto de la geometría, *y posón*, que es discreto, como objeto de la aritmética. Tolemeo habla del «tamaño» de las cuerdas de un círculo. Simson traduce por «magnitud»; De Morgan prefiere una interpretación como «cuantuplicidad». «Tamaño» me parece la más acorde con el uso griego.

Por otro lado, Hankel y Simson, siguiendo a Barrow (*Lecciones Cantabrigienses*, Londres, 1684, Lect. III de 1666), piensan que esta definición es demasiado general y vaga, tiene un aire de noción más filosófica que matemática y apenas desempeña ningún papel en la teoría euclídea de la proporción. Hankel la considera, además, sospechosa por el uso de *katà pēlikótēta*, ya que esta expresión sólo aparece otra vez en VI, Def. 5 (*pēlikótētes*). Simson sugiere la posibilidad de que sea una interpolación debida a un editor «menos inteligente que Euclides» (Simson, *Los seis primeros libros y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides*, págs. 308-309). Por lo demás, aparece en todos los manuscritos y no hay suficientes razones para no considerarla genuina.

Lógos, por otra parte, se aplicaba en principio a «razón» únicamente entre conmensurables frente a *álogos* «inconmensurable». En el libro V de los *Elementos* adquiere un sentido más amplio que abarca la razón de magnitudes tanto conmensurables como inconmensurables, pues ambas tienen la posibilidad de exceder una a otra cuando se multiplican.

Entre las definiciones 3 y 4, dos mss. y Campano insertan las siguientes palabras: *analogía dè hē tòn lógōn tautótēs*, «proporción es la igualdad de razones». Se trata de una interpolación posterior a Teón sacada de las obras de aritmética. Aristóteles habla de proporción como «igualdad de razones» en *Ética Nicomáquea V* 6, 1131a31, pero está claro que se refiere a números.

25. Los intérpretes de la teoría euclídea de la proporción han tomado esta definición en diversos sentidos. Hay quienes la han visto como una generalización de la relación de razón entre magnitudes homogéneas (V, Def. 3), capaz de cubrir tanto magnitudes conmensurables como magnitudes inconmensurables; pero ésta es una distinción no pertinente en el presente contexto. Más justo sería entender que la def. 4 excluye la mediación de dicha relación entre una magnitud finita y otra infinita del mismo género. Hay quienes amplían esta exclusión a las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Es cierto que el ámbito al que se refiere la teoría carece de una magnitud máxima, por esta def. 4, y de una magnitud mínima, por la proposición X 1. También cabe pensar que la matemática griega «clásica» viene a soslayar así ciertos usos del infinito en un sentido semejante al declarado por Aristóteles: los matemáticos no necesitan servirse de la idea de infinito (actual); les basta considerar objetos de la magnitud que quieran (*Física* 207b30 ss.), habida cuenta de la posibilidad de ir más allá de una magnitud finita dada, bien mediante adiciones sucesivas (en la línea de la def. 4) o bien mediante sustracciones sucesivas (en la línea de la prop. X 1).

En este punto parece obligado recordar un lema implícito en ciertas pruebas atribuidas a Eudoxo, que Arquímedes formulará como una asunción *[lambanómenon]* expresa: dadas dos magnitudes geométricas desiguales (líneas, superficies, sólidos), la mayor excede a la menor en una magnitud tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a su vez a cualquier magnitud del mismo género que las relacionadas (*Sobre la esfera y el cilindro I*; en *Sobre espirales*, la suposición se restringe a líneas y áreas; en *Sobre la cuadratura de la parábola*, a áreas). Así pues, cabe considerar que esta asunción de Arquímedes no se identifica con la def. 4, sino que en cierto modo la complementa. Euclides define una relación de razón entre magnitudes

5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón[26] con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.[27]
6. Llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.[28]
7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.[29]

---

homogéneas en general por referencia a la multiplicación; Arquímedes postula, en cambio, una condición precisa para ciertas clases de magnitudes homogéneas (líneas, superficies, sólidos) y se remite a la adición de diferencias (una referencia similar hará Euclides luego, en la prop. X 1). Pero asimismo cabe sospechar que el proceder de Euclides es una reelaboración más alejada de las primicias eudoxianas que la vía de explicitación directa y específica seguida por Arquímedes.

26. Por regla general, adoptaré la expresión «guardar la misma razón» como traducción común de las diversas formulaciones de esta relación de proporción que aparecen en el texto: e.g. «estar en la misma razón *[en tôi autôi lógōi eînai]*», en esta def. 5; o «tener la misma razón *[tòn autòn lógon échein]*», en la def. 6. Por lo demás, la fórmula más corriente en las proposiciones será: «como ... (es) a ..., así ... (es) a ... *[hōs ... pròs ..., hoútōs ... pròs ...]*» —una variante: *hoîos ... polì ..., kaì ... potì ...*, que podría ser anterior, aparece en ARQUITAS B 2.

27. Suele considerarse que esta def. V, 5, constituye la piedra angular de la teoría de la proporción. Desde luego, suministra un criterio necesario y suficiente de proporcionalidad. Por otro lado, además de su importancia sistemática, ha adquirido relieve en una perspectiva histórica. No sólo podría ser una clave para determinar las relaciones entre el legado de Eudoxo y la reelaboración de Euclides; también reviste importancia a la hora de apreciar la suerte conocida por las versiones posteriores de la teoría euclídea misma. Por último, no estará de más advertir cierta diferencia entre la forma lógica de esta definición y la forma lógica de su aplicación habitual en las proposiciones demostradas por su mediación. La forma lógica de la def. 5 viene a ser la de una disyunción de conjunciones: siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría, y m, n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a : b :: c : d$ si y sólo si: *o* $((m.a > n.b)$ y $(m.c > n.d))$ o $((m.a = n.b)$ y $(m.c = n.d))$ o $((m.a < n.b)$ y $(m.c < n.d))$. Sin embargo, la forma lógica de su aplicación en la proposición V 11, por ejemplo, corresponde más bien a una conjunción de condiciones: (si $m.a > n.b$, entonces $m.c > n.d$) y (si $m.a = n.b$, entonces $m.c = m.d$) y (si $m.a < n.b$, *entonces* $m.c < n.d$). Estas dos formas, de suyo, no son lógicamente equivalentes ni, por cierto, la primera implica la segunda. Pero en el contexto de la teoría, devienen efectivamente equivalentes gracias a la suposición implícita de que las magnitudes consideradas constituyen un sistema de objetos totalmente ordenado.

28. Más literalmente: «llámense en proporción» (*análogon kaleísthō*). El uso de *kaleísthō* parece indicar que se trata de una estipulación del propio Euclides. *Análogon* es una expresión adverbial con un uso marcadamente especializado en matemáticas. Su sentido se corresponde con el de la expresión formularia *anà lógon*, empleada antes de Euclides: aparece, por ejemplo, en el fragmento B 2 de Arquitas sobre las proporciones musicales, en Platón (e.g. *Fedón*, 110d), o en Aristóteles (e.g. *Meteor.* 367a30 ss.). A. SZABÓ: *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest, 1969, II §§ 13-16, propone algunas conjeturas filológicas e históricas de interés sobre el significado matemático de ambas expresiones. Euclides, por su parte, se sirve de *análogon* con cierta libertad, por ejemplo: para referirse a las magnitudes proporcionales en su conjunto —como en esta def. 6 o en la def. 9—, o para referirse a un término proporcional (a «una proporcional») —como en las props. VI 12, 16—. Por lo demás, esta especialización relativamente técnica de *análogon* no es compartida por otros términos relacionados como el sustantivo *analogía* o el adjetivo *análogos*, que enmarcan su posible significación matemática en una gama de usos más amplios, dentro de un sentido general de paralelismo, correspondencia o semejanza.

29. Esta definición depara un criterio de no proporcionalidad y completa, tras las defs. 4 y 5, el núcleo básico de la teoría euclídea. Sin embargo, también convendría declarar un supuesto adicional: la existencia de un cuarto término proporcional —obra tácitamente por ejemplo en la prueba de la prop. V 18, y sólo más adelante, en VI 12, Euclides se detiene a demostrar un caso particular: dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional—. Si a esta suposición se añade una condición de tricotomía congruente con el sistema ordenado

8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.[30]
9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.
10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.[31]
11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.[32]
12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.[33]
13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.[34]

---

de magnitudes al que se refiere la teoría, Euclides puede disponer de un recurso suplementario para probar una proposición (i.e. que *a* es a *b* como c es a *d*), a saber: la reducción al absurdo de las alternativas de no proporción (i.e. que la razón de *a* a *b* sea mayor, o sea menor, que la razón de *c* a *d*). Por otra parte, al margen de la deuda que la def. 5 tuviera contraída con algún criterio de proporcionalidad avanzado por Eudoxo, esta definición 7 parece, según todos los visos, original de Euclides.

30. Hankel cree que la presente definición ha sido interpolada, pues es superflua y utiliza, contra la costumbre de Euclides, la palabra *hóros* para el término de una proporción. Pero ya Aristóteles utiliza *hóros* en este sentido (*Ética Nicomáquea*, 1131a31 ss.): «La proporción es una igualdad de razones y requiere, por lo menos, cuatro términos. Claramente, la proporción discreta requiere cuatro términos; pero también la continua, porque se sirve de uno de ellos como dos y lo menciona dos veces».

La distinción entre discreta y continua parece remontarse a los pitagóricos (cf. NICÓMACO, II 21, 5; 23, 2, 3) donde se utiliza *synēmménē* en lugar de *synechḗs*. Euclides no emplea los términos *dierēmménē* y *synechḗs* en esta correlación.

Por otra parte, las primeras palabras de la Def. 9, «cuando tres magnitudes son proporcionales», que parecen referirse a la def. 8, apoyan la idea de que esta última es genuina.

31. Está claro que «razón duplicada, triplicada... etc.» son meros casos particulares de la razón compuesta, siendo, de hecho, razones compuestas de dos, tres, etc. razones iguales.

Los geómetras griegos llamaban razón duplicada y triplicada a las que son iguales, respectivamente, al cuadrado y al cubo de una razón. Euclides utiliza los términos *diplasíōn* y *triplasíōn* y no *diplásios* y *triplásios* porque estos últimos se usaban frecuentemente en el sentido de razones de 2 a 1, 3 a 1, etc. En este caso, su esfuerzo por introducir rigor en la terminología tuvo un éxito sólo parcial, pues encontramos varios ejemplos de uso indiscriminado de estos términos en Arquímedes, Nicómaco y Papo.

Las cuatro magnitudes de la Def. V, 10, deben estar, por supuesto, en proporción continua aunque el texto griego no lo haga constar.

32. Utilizo «correspondientes» para verter *homóloga*, en vez del cultismo «homólogas» empleado en otras versiones al español. Euclides parece estipular aquí cierto sentido técnico para un término de uso común, y a esta actitud quiere aproximarse la versión presente. El sentido inicialmente previsto por Euclides se generalizó más tarde y, a partir de Arquímedes, *homólogos* llegó a significar unos elementos geométricos (segmentos, lados, diámetros) que ocupan parejo lugar en dos figuras que se comparan. Quizás en los *Elementos* VI 19, 20, ya se den algunos pasos hacia esta generalización.

33. A partir de aquí nos encontramos con una serie de términos que se refieren a diversas transformaciones de razones o proporciones. En las definiciones 12-17, Euclides los aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado (cf. V 16, 7 por., 18, 17, 19 por.).

Enalláx «por alternancia», término general que no se usa exclusivamente en matemáticas, lo encontramos ya en Aristóteles (*Analíticos Segundos* 15, 74a18: *kaì tò análogon hoti enalláx*) «y que una proporción es por alternancia». En términos matemáticos se podría expresar de la siguiente forma: $a : b :: c : d \rightarrow a : c :: b : d$.

34. *Anápalin* «por inversión», término general que no se usa sólo en matemáticas, lo encontramos ya en Aristóteles aplicado a las proporciones (*Del cielo* 16, 273b32). En términos matemáticos: $a : b :: c : d \rightarrow b : a :: c : d$.

14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente.[35]
15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.[36]
16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.[37]
17. Una razón *por igualdad*[38] se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.[39]

35. *Sýnthesis lógou* «composición de una razón» no es lo mismo que *synkeímenos lógos* «razón compuesta». Sin embargo, la distinción entre ambas no está clara en Euclides, que, por ejemplo, en V 17, utiliza *synkeímenos* refiriéndose a la composición de una razón. Los geómetras posteriores a Euclides utilizan *synthénti o katà sýnthesin* (Arquímedes) para referirse a la composición de una razón en un intento de deshacer la ambigüedad de los términos que todavía aparece en Euclides. Por otra parte los verbos *syntíthēmi y synkeimai* se utilizan también como «sumar» en otros contextos.

Sýnthesis lógou en expresión matemática:

$$a : b :: c : d \rightarrow (a + b) : b :: (c + d) : d$$

36. *Diaíresis lógou* se refiere a la transformación:

$$a : b :: c : d \rightarrow (a - b) : b :: (c - d) : d$$

Así como la «composición de una razón» se obtenía sumando el antecedente con el consecuente, la «separación de una razón» se obtiene restando el consecuente del antecedente. Sin embargo, la palabra griega *diaíresis* hace referencia a la «división» de una razón, lo mismo que *dielónti* por oposición a *synthénti.* Por otra parte, los términos griegos *synthénti y dielónti* dan lugar al uso de los latinos *componendo y separando* desde la Edad Media hasta nuestros días. Por todo ello, «separación de una razón» me parece la versión más adecuada.

37. *Anastrophē̃* «por conversión»:

$$a : b :: c : d \rightarrow a : (a - b) :: c : (c - d)$$

La traducción al latín *convertendo* del participio *anastrépsanti*, paralelo *a synthénti y dielónti*, ha sido utilizada también desde la Edad Media.

38. *Di'ísou lógos* parece referirse a «igual distancia o intervalo», es decir, después de un número igual de términos intermedios. Una vez más la definición se aplicaría mejor a proporciones que a razones, pero no se prueba hasta V 22. Por tanto, la definición sirve sólo para dar nombre a cierta inferencia que es de constante aplicación en matemáticas:

$$a : b :: A : B; b : c :: B : C ... j : k :: J : K \rightarrow a : k :: A : K$$

La expresión *di'ísou* no aparece con frecuencia en contextos no geométricos (cf., empero, PLATÓN, *República* 617b); e incluso en estos contextos suele emplearse a través de la invocación o aplicación de proposiciones euclídeas como V 22-23. Por otro lado, no deja de llamar la atención la composición un tanto explicativa de esta definición: «o, dicho de otro modo, ...». En ella —justamente en la primera parte de esta definición nominal de proporción por igualdad, la que precede a la versión alternativa en términos congruentes con las defs. anteriores— se ha visto uno de los posibles casos de contaminación del texto euclídeo mediante la interpolación de ciertos teoremas en las definiciones mismas; *vid.* G. AUJAC, «Les définitions du livre V d'Euclide dans la collection Héronienne et dans les *Institutions* de Cassiodore», *Llull* 11/20 (1988), 5-18.

39. Algunas fuentes (e.g. los mss. F, V, p; aunque no el ms. no teonino P) insertan a continuación una definición de proporción ordenada *[tetagménē analogía]*. Viene a ser la que existe cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras—, así el antecedente es al consecuente —entre las segundas—, y como —entre las primeras— el consecuente es a alguna otra magnitud, así —entre las segundas— el consecuente es a alguna otra. La formulación original es un tanto elíptica y suele aparecer como una glosa al margen en los restantes mss. teoninos.

18. Una proporción perturbada[40] se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a alguna otra (magnitud) —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra (magnitud) es al antecedente.[41]

40. *Tetaragménē* «perturbada» se usa cuando a tres magnitudes A, B, C se asignan otras tres a, b, c de modo que $A : B :: b : c$ y $B : C :: a : b$. Describe un caso particular de la proporción «por igualdad».

41. Los libros V y VI de los *Elementos* exponen la teoría griega «clásica» de la proporción. El libro V sienta unas bases conceptuales y deductivas, cuyo núcleo explícito podría contraerse a las definiciones 4, 5 y 7. El libro VI muestra diversas aplicaciones entre las que no faltan réplicas de resultados obtenidos anteriormente en el libro I (147) o en el II (II 5, 14) por medios más sencillos, intuitivos y obedientes a los antiguos dictados de la Musa pitagórica —e.g. la aplicación de áreas—. Ahora Euclides desarrolla un legado no sólo más abstracto y refinado sino más reciente: el núcleo de la teoría, en especial el criterio de comparación de equimúltiplos del que se hace eco la definición 5, suele atribuirse a Eudoxo de Cnido (*fl. c.* 368-365), miembro prominente de la Academia platónica. Hoy tenemos motivos para suponer que los matemáticos griegos del s. v ya habían conocido una noción numérica de razón; pero sus limitaciones se habían hecho manifiestas a raíz del tropiezo con las magnitudes inconmensurables. Hay, sin embargo, indicios que dan pie para conjeturar que el s. iv bien podría haber atisbado algún otro planteamiento afín al antiguo proceder «pitagórico», pero más comprensivo: en particular, la posibilidad de dar cuenta de razones y proporciones a partir de la noción de *anthyphaíresis* —o *antanáiresis*, *cf.* ARISTÓTELES, *Tópicos* 158b2935—. (*Vid.*, por ejemplo, los estudios de W. R. KNORR, *The Evolution of Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston, 1975; D. H. FOWLER, «Anthyphairetic ratio and Eudoxian proportion», *Archive for the History of Exact Sciences* 24 (1981), 69-72, y *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Oxford, 1987; J. L. GARDIES, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, París, 1988). Lo cierto, en cualquier caso, es que la reelaboración euclídea del nuevo legado —«eudoxiano»— constituye una teoría de magnitudes proporcionales, al margen de su conmensurabilidad/inconmensurabilidad, que pasará a la historia como «la concepción griega» de la proporción.

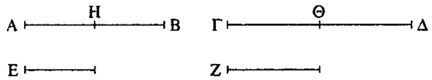
La teoría euclídea de la proporción reviste sumo interés desde al menos tres puntos de vista: el historiográfico, el sistemático y el de su recepción y transmisión posterior. Es importante, en primer lugar, para comprender el desarrollo de la matemática griega antes de que ésta quedara marcada por la obra de Euclides. Hoy no cabe aceptar sin reservas la imagen que los comentadores de Euclides —Proclo, en especial— han difundido de esa matemática anterior como una matemática tendenciosamente «pre-euclídea», llamada a encontrar su gozo y su corona en los *Elementos.* Antes he aludido a unas nociones precedentes, como la numérica de razón y la *anthyphairética* de proporción; ahora bien, la teoría de la proporcionalidad del libro V de los *Elementos* no es tanto una culminación como un olvido de esos posibles antecedentes (luego recobrados de modo parcial y un tanto sesgado en la aritmética del libro VII y en alguna proposición del libro X). La teoría generalizada de los *Elementos* parte de la proporción como una relación tetrádica entre magnitudes homogéneas (al menos, por parejas, conforme a la def. V, 3) «a es a b como c es a d», cuya representación más adecuada sería el esquema «$a : b :: c : d$» en lugar del esquema diádico habitual «$(a, b) = (c, d)$», y donde la noción de razón parece haber perdido su anterior entidad propia. Son sintomáticas la vaguedad alusiva de la def. 3 o las funciones más denominativas que operativas de otras definiciones que envuelven la idea de razón (e.g. las defs. V, 14-16); no faltan incluso definiciones equívocas que en apariencia hablan de razones cuando, en realidad, se refieren a proporciones o a variaciones que preservan la proporcionalidad (e.g. las defs. V, 12, o V, 17). Así pues, dos cuestiones significativas desde el punto de vista historiográfico son la peculiar «integración» del concepto de razón en esta nueva teoría generalizada de la proporción y las relaciones entre esta versión «clásica» de la proporcionalidad y otras posibles alternativas marginales, como la *anthyphairética.* Una cuestión adicional es la suscitada por las relaciones de filiación entre el legado presuntamente original de Eudoxo y la teoría expuesta en los *Elementos.* A la luz de alguna indicación de Aristóteles (e.g. en *Analíticos Segundos*, 74a17) y de las precisiones adoptadas luego por Arquímedes, cabe sospechar que la versión de Euclides difiere de las nociones avanzadas por Eudoxo más de lo que dan a entender los escoliastas del libro V que lo presentan como un hallazgo o una invención cabal de Eudoxo mismo.

La teoría tiene, en segundo lugar, la importancia sistemática que se deriva del intrigante juego entre sus bases expresas y sus suposiciones tácitas. De hecho, la explicitación y la reconstrucción estructural del núcleo de principios (axiomas y definiciones) de la teoría han venido a ser —ya desde su recepción árabe— una

PROPOSICIÓN 1

Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

Sean un número cualquiera de magnitudes AB, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número.



Digo que, cuantas veces AB sea múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

---

poderosa tentación para los mejores comentadores del libro V. Tanto es así que un criterio tradicional de la calidad de una versión o un comentario de los *Elementos* ha sido justamente el grado de comprensión y de penetración mostrado con respecto a esta teoría. Simson, por ejemplo, en su cuidada edición de 1756, se considera obligado a explicitar o añadir cuatro axiomas a las definiciones euclídeas: «I) Las cantidades equimultíplices de una misma cantidad, o de cantidades iguales, son entre sí iguales; II) Las cantidades, de las cuales una misma cantidad es equimultíplice o cuyas equimultíplices son iguales, son también iguales entre sí; III) La multíplice de una cantidad mayor es mayor que la equimultíplice de una menor; IV) La cantidad, cuya multíplice es mayor que la equimultíplice de otra, es mayor que ésta» (R. SIMSON, ed. española, Madrid, 1774, págs. 144-145 —*vid.* el listado de la «Introducción general» a EUCLIDES, *Elementos* I-IV (núm. 155 de la B.C.G.), VI, núm. 16—. Sobre la reconstrucción hoy establecida de su núcleo conceptual y deductivo pueden verse I. MUELLER, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)-Londres, 1981, 3, §§ 3.1-3.2, págs. 134-148; L. VEGA, *La trama de la demostración*, Madrid, 1990, 4, § 4.2, págs. 329-330).

La teoría tiene, en fin, la trascendencia histórica que le han deparado las circunstancias de su recepción y transmisión, en particular a través de las versiones arábigo-latinas de la Edad Media. No estará de más recordar que la depuración de algunas interpolaciones y confusiones debidas a esta tradición y difundidas por la influyente edición de Campano —por ejemplo, una definición espuria y abstrusa de «proporción continua»—, así como la explicitación progresiva de los supuestos operativos en la teoría, marcaron el desarrollo de la crítica textual de los *Elementos* antes de la —digamos— «revolución filológica» del s. XIX; las ediciones de Comandino (1572, 1575) o de Simson (1756) son brillantes muestras. Cuenta, además, con el interés añadido de haber contribuido a una incipiente matematización de la filosofa natural a través de, por ejemplo, Bradwardine (en la primera mitad del s. XIII) y Oresme (en la segunda mitad del s. XIV). E incluso, de creer a Lipschitz y a Dedekind (amén de algunos historiadores de nuestro tiempo), no habría sido ajena a la moderna fundamentación de los números reales mediante la reducción de un número irracional a una «cortadura» en el conjunto ordenado de los números racionales, en la medida en que esta «cortadura» equivaldría a la que una razón entre magnitudes inconmensurables pudiera suponer en el contexto de la definición V, 5: bastaría (según dicen esos historiadores) asociar a una relación a/b irracional una partición en dos clases de números racionales m/n, los que son tales que $mb > ma$ y los que son tales que $mb < ma$. Pero esta adaptación de la definición euclídea, aun siendo algebraicamente viable, no dejaría de ser un trasplante demasiado forzado en un marco tan alejado de los *Elementos* como los problemas de fundamentación y reducción de la teoría matemática del s. XIX.

Por lo demás, la teoría del libro V no necesita galas ajenas para brillar con luz propia en el contexto de los *Elementos*. Y bien se puede terminar esta desmesurada nota con lo que dice Simson como remate de sus anotaciones al libro V: «...concluida ya la enmienda del libro V, por fin de él asiento gustosísimo a la opinión de Cl. Barrow: es a saber "que nada hay en toda la Obra de los *Elementos* inventado con mayor sutileza, establecido con más solidez, ni tratado con más exactitud que la doctrina de las proporcionales"» (R. SIMSON, *op. cit.*, pág. 322).